ملخص دروس السنة الثانية بكالوريا علوم تجريبية

تقديم : ذ .العربي الوظيفي www.MathsR.ma ثانوية ابن تومرت – مراكش

الدرس	الصفحة
الأعداد العقدية	2
الهندسة الفضائية	5
المتتاليات العددية	7
اتصال دالة عددية	8
الإشتقاق	9
جدول الفروع الانهائية	11
الدوال اللوغاريتمية و الأسية	12
الدوال الأصلية	13
حساب التكامل	14
حساب الإحتمال	15
المعادلات التفاضلية	17

2 ع ت — الأعداد العقدية

1. مجموعة الأعداد العقدية :

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز **C** و تحقق :

. $R \subset C$

. العمليات الجبرية في **C** هي امتداد للعمليات في **R** .

. تحتوي على عدد غير حقيقي يكتب **i** ويحقق **$i^2=-1$** .

. كل عنصر **z** من **C** يكتب بكيفية وحيدة على شكل: **a+ib** حيث **a** و **b** من **R** .

مصطلحات :

. كل عنصر من **C** يسمى عدد عقدي

. المجموعة **C** تسمى مجموعة الأعداد العقدية .

. الكتابة **z=a+ib** تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي **z** .

. العدد الحقيقي **a** يسمى الجزء الحقيقي للعدد **z** ورمزه $a=\operatorname{Re}(z)$.

. العدد الحقيقي **b** يسمى الجزء التخيلي للعدد **z** ورمزه $b=\operatorname{Im}(z)$.

خاصية : (الشكل الجبري والعمليات في مجموعة الأعداد العقدية :

ليكن **a** و **b** و **c** و **d** أعداد حقيقية .

. $a=b=0 \Leftrightarrow a+ib=0$

. $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Leftrightarrow a+ib=c+id$

. $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

. $(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

2. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى المزود بمعلم م م م $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ يسمى المستوى العقدي

تعريف : (اللحق و الصورة)

. نعتبر عددا عقديا $z=a+ib$ حيث $(a,b)\in R^2$.

. النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة العدد **z** و نرمز لها بالرمز $M(z)$.

. العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى لحق $M(a,b)$ ويكتب z_M .

. المتجهة $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ تسمى المتجهة الصورة للعدد **z** ونرمز لها بالرمز $\vec{u}(z)$.

. العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونرمز له ب $z_{\vec{u}}$.

خاصية : (اللحق و العمليات)

. لحق نقطة **M** هو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$

. $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$

. $z_{\vec{u}+\vec{v}}=z_{\vec{u}}+z_{\vec{v}}$

. $z_{\vec{u}}=z_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v}$

لحق المتجهة $\alpha\vec{u}$ هو $\alpha z_{\vec{u}}$

تعريف : (المرافق)

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان .

العدد العقدي $x-iy$ يسمى مرافق العدد العقدي **z** ويرمز له بالرمز $\overline{z}$

خاصية : (المرافق والعمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين .

. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2\neq 0)$

. $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

تعريف : (المعيار)

ليكن **z=a+ib** عددا عقديا مع $(a,b)\in R^2$

العدد الحقيقي $\sqrt{a^2+b^2}$ يسمى معيار العدد **z** ونرمز له بالرمز $|z|$

ملاحظة :

. ليكن **z** عدد اعقديا و **M** صورته في المستوى العقدي : لدينا $OM=|z|$

. لتكن **A** و **B** نقطتين الحاقها على التوالي z_A و z_B لدينا: $AB=|z_B-z_A|$

. $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$

خاصية : (المعيار و العمليات)

. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ حيث $z_2\neq 0$ ، $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

. $|z^n|=|z|^n$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

تعريف : (العمدة)

ليكن **z** عددا عقديا غير منعدم و **M** صورته $(O\neq M)$

المتجهتان $\vec{e}_1$ و $\overrightarrow{OM}$ الغير منعدمتين تحددان زاوية موجهة

كل قياس للزاوية $(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})$ نسميه عمدة العدد **z** ونرمز له ب $\arg(z)$

ولدينا $\arg(z)\equiv(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

خاصية : (العمدة و العمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

. $\arg(\overline{z}_1)\equiv-\arg(z_1)\quad[2\pi]$

. $\arg(z_1z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)\quad[2\pi]$

. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)\quad[2\pi]$

. $\arg(z^n)\equiv n\arg(z)\quad[2\pi]$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

2 ع ت الأعداد العقدية

خاصية: (قياس الزوايا)

لتكن **A** و **B** و **C** و **D** اربع نقط من المستوى الحاقها على التوالي :

z_A و z_B و z_C و z_D

. $\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(z_A)\ [2\pi]$ حيث $O \neq A$

. $\left(\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$ حيث $A \neq B$

. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$ حيث $A \neq B$ و $A \neq C$

. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$ حيث $A \neq B$ و $D \neq C$

3.الشكل المثلثي :

خاصية : (الشكل المثلثي)

كل عدد عقدي غير منعدم **z** يكتب على الشكل :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

نقول إننا كتبنا العدد العقدي **z** على الشكل المثلثي.

ترميز :

نرمز أيضا للكتابة $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بالرمز $[r,\theta]$.

خاصية : (العلاقة بين الشكل الجبري والشكل المثلثي)

$$z = a + ib = [r,\theta] \iff \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

خاصية : (الشكل المثلثي و العمليات)

ليكن r و r' عددين حقيقين موجبين قطعا و θ و θ' عددين حقيقين

. $\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$ و $\dfrac{1}{[r,\theta]} = \left[\dfrac{1}{r},-\theta\right]$

. $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr',\theta+\theta']$

. $\dfrac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\dfrac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

. $[r,\theta]^n = [r^n,n\theta]$ حيث $n \in Z$

خاصية : (صيغة موافر)

لكل n من **N** و θ من **R** لدينا :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$[\mathbf{r},\theta]^{\mathbf{n}} = [\mathbf{r}^{\mathbf{n}},\mathbf{n}\theta]$$

4.الترميز الاسي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف : (الرمز $e^{i\theta}$)

لكل عدد حقيقي θ نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ للعدد العقدي $[1,\theta] = \cos\theta + i\sin\theta$

خاصية : (الترميز الاسي والعمليات)

ليكن α و θ عددين حقيقين

. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ، $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ ، $e^{i\theta}e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$

. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}$ ، $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ حيث $n \in Z$

خاصية : (الترميز الاسي لعدد عقدي)

كل عدد عقدي غير منعدم **z** يكتب على الشكل : $z = re^{i\theta}$ حيث

$|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta\ \ [2\pi]$

. نقول إننا كتبنا العدد العقدي **z** على الشكل الاسي

تعريف : (صيغتا اولير)

لكل عدد حقيقي θ الصيغتان:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

و

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

تسميان صيغتا اولير

5.المعادلات من الدرجة الثانية :

خاصية : (المعادلات من الدرجة الثانية)

S مجموعة حلول المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث **a** و **b** و **c**

أعداد حقيقية و **a** غير منعدم. مميز المعادلة $\Delta = b^2 - 4ac$

. اذا كان $\Delta \succ 0$ فان : $S = \left\{\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

. اذا كان $\Delta = 0$ فان : $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$

. اذا كان $\Delta \prec 0$ فان : $S = \left\{\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

خاصية : (العلاقة بين المعاملات و الجذور)

ليكن z_1 و z_2 حلي للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$

حيث **a** و **b** و **c** أعداد حقيقية و **a** غير منعدم.

لدينا : $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$

$z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

الأعداد العقدية 2ع ت

6.تطبيقات هندسية للاعداد العقدية :

خاصية : (الاستقامية – التوازي – التعامد – التداور)

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة مثنى مثنى .

. تكون A و B و C مستقيمية اذا وفقط اذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

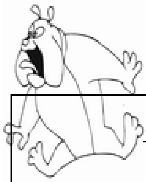
. $(AB)//(DC)$ يكافئ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

يكافئ $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \ [\pi]$

. $(AB)\perp(DC)$ يكافئ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

يكافئ $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

. النقط A و B و C وDمتداورة يكافئ $\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \cdot \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}\right) \in \mathbb{R}$



خاصية : ...طبيعة مثلث

. ABC مثلث قائم الزاوية في A يكافئ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$

. ABC مثلث متساوي الساقين في A يكافئ $|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$

. ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A يكافئ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$

. ABC متساوي الأضلاع يكافئ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$

خاصية: .... طبيعة رباعي

. ABCD متوازي الأضلاع يكافئ $z_B - z_A = z_C - z_D$

. ABCD مستطيل يكافئ ABCDمتوازي الأضلاع و $(AB)\perp(AD)$

. ABCD معين يكافئ ABCDمتوازي الأضلاع و $(AC)\perp(BD)$

. ABCDمربع يكافئ ABCD مستطيل و AB=AC

يكافئ $z_B - z_A = z_C - z_D$ و $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = \pm i$

خاصية: ..... التحويلات الإعتيادية

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$.

. الكتابة العقدية للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هي : $z' = z + z_{\vec{u}}$

. الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبته k هي :

$$z' = k(z - \omega) + \omega$$

. الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ هي :

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

علاقات في الحساب المثلثي:

$$\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)$$
$$-\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$$
$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

x بالراديان	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	غير معرف
$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	-1	0	0
2π	1	0	0

$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$	$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\tan(x + 2\pi) = \tan x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

الهندسة الفضائية 2ع ت

نعتبر الفضاء منسوبا إلى م م م م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1.الجداء السلمي لمتجهتين :

a.الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

إذا كان $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

فإن : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

نتيجة : $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$

b.منظم متجهة :

منظم متجهة $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ هو العدد الحقيقي الموجب :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

c.المسافة بين نقطتين :

المسافة بين نقطتين **A** و **B** هي :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

d.متجهة منظمية على مستوى :

نسمي متجهة منظمية على مستوى **P** ، كل متجهة غير منعدمة اتجاهها عمودي على المستوى **P** .

نتيجة:

متجهة منظمية على مستوى معرف بمعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي $\vec{n}(a,b,c)$.

ملاحظة:

. كل مستقيم عمودي على مستوى يكون موجها بمنظمية على هذا المستوى .

. تمثيل بارامتري للمستقيم المار من نقطة Ω والعمودي على المستوى **P** المعرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$ هو :

$$\begin{cases} x=x_\Omega+at \\ y=y_\Omega+bt \\ z=z_\Omega+ct \end{cases} \quad (t\in R)$$

e.تحديد معادلة ديكارتية لمستوى مار بنقطة ومتجهة منظمية عليه :

لتكن **A** نقطة و $\vec{n}$ متجهة غير منعدمة .

يوجد مستوى وحيد **P** مار من **A** و $\vec{n}$ منظمية عليه ولدينا :

$$M\in P \Leftrightarrow \vec{n}.\vec{AM}=0$$

f.تحديد مثلوث إحداثيات المسقط العمودي لنقطة على مستوى :

مسقط نقطة Ω على مستوى **P** هونقطة تقاطع **P** مع المستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى **P** . ويتم تحديد مثلوث إحداثياتها بحل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

7.الفلكة :

a.تعريـــــف :

لتكن Ω نقطة و **r** عددا حقيقيا موجبا قطعا.

مجموعة النقط **M** من الفضاء التي تحقق $\Omega M=r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها **r** ونرمزلها بالرمز : $S(\Omega,r)$.

ولدينا : $M\in S \Leftrightarrow \Omega M=r$

b.معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركز وشعاع :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a,b;c)$ وشعاعها **r** هي

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

c.معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن S فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و **M** نقطة في الفضاء .

$$M\in S \Leftrightarrow \vec{AM}.\vec{BM}=0$$

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

d.دراسة **E**مجموعة النقط التي تحقق : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

باستعمال المتساوية $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ نجد أن :

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

تكافئ $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\alpha$

مع $\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$

نفصل بين 3 حالات :

.إذا كان $\alpha\prec 0$ فإن **E** مجموعة فارغة .

.إذا كان $\alpha=0$ فإن **E** هي الأحادية $\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)\right\}$.

.إذا كان $\alpha\succ 0$ فإن **E** فلكة مركزه $\Omega\left(-\frac{a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ وشعاعها $\sqrt{\alpha}$

e.الوضع النسبي لفلكة ومستقيم :

لتكن $S(\Omega,r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها **r** و (D) مستقيما في الفضاء

ليكن **H** المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (D)

نضع : $d=d(\Omega,(D))$

. إذا كان $d\succ r$ فإن الفلكة والمستقيم لا يتقاطعان

نقول إن المستقيم (D) خارج الفلكة $S(\Omega,r)$

. إذا كان $d=r$ فإن المستقيم مماس للفلكة في النقطة **H**،يتم تحديد مثلوث إحداثياتها بحل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

الهندسة الفضائية 2ع ت

. إذا كان $d \prec r$ فإنه يكون للفلكة والمستقيم نقطتان مشتركتان ،يتم تحديد مثلوث إحداثياتهما بحل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نقول إن المستقيم يخترق الفلكة

f.الوضع النسبي لفلكة ومستوى :

لتكن $S(\Omega,r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها **r** و (P) مستوى من الفضاء معرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$.

ليكن **H** المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P) .

نضع : $$d=(\Omega,(P))=\frac{|ax_{\Omega}+by_{\Omega}+cz_{\Omega}+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

.إذا كان $d \succ r$ فإنه لا توجد نقطة مشتركة بين $S(\Omega,r)$ و (P) .

.إذا كان $d=r$ فإن $S(\Omega,r)$ و (P) نقطة وحيدة مشتركة وهي H

نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة $S(\Omega,r)$ في H

.إذا كان $d \prec r$ فإن تقاطع $S(\Omega,r)$ و (P) هو الدائرة التي مركزها H وشعاعها $r'=\sqrt{r^2-d^2}$

ملحوظة 1: إذا كان $d=0$ أي $\Omega\in(P)$ فإن (P) يقطع $S(\Omega,r)$ وفق دائرة كبرى مركزها Ω وشعاعها r .

ملحوظة 2: يتم تحديد مثلوث إحداثيات النقطة **H** بحل نظمة مكونة من معادلة ديكارتية للمستوى و تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)، المار من Ω والعمودي على المستوى .

3.الجداء المتجهي :

a.الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

إذا كان $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

فإن : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y'\end{vmatrix}\vec{k}$

b.استقامية متجهتين

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ يكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

c.استقامية ثلاث نقط

A و **B** و **C** مستقيمية يكافئ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

نتيجة :منظمية على مستوى (ABC)

لتكن **A** و **B** و **C** نقطا غير مستقيمية .

المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

ولدينا التكافؤ التالي : $M\in(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

الذي نستنتج منه معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

d.مساحة مثلث:

مساحة مثلث **ABC** هي : $$S_{ABC}=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$$

e. مساحة متوازي الأضلاع:

مساحة متوازي الأضلاع **ABCD** هي : $$S_{ABCD}=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$

d.مسافة نقطة عن مستقيم

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة **A** و موجه بمتجهة $\vec{u}$ هي

$$d\left(\Omega\,;D\left(A,\vec{u}\right)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$$

e.توازي وتعامد مستويين:

نعتبر مستويين $(P): ax+by+cz+d=0$

$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P)

المتجهة $\vec{n}(a',b',c')$ منظمية على (P')

. $(P)//(P')$ يكافئ $\vec{n}\wedge\vec{n'}=\vec{0}$ (جداء متجهي)

. $(P)\perp(P')$ يكافئ $\vec{n}.\vec{n'}=0$ (جداء سلمي)

f.تقاطع مستويين :

نعتبر مستويين متقاطعين (P) و (P').

لتكن $\vec{n}$ متجهة منظمية على (P) و $\vec{n'}$ متجهة منظمية على (P')

تقاطع المستويين (P) و (P') هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{n}\wedge\vec{n'}$

2ع ت المتتاليات العددية

1.تعريف متتالية :

ليكن n_0 عددا طبيعيا .

عندما نربط كل عدد صحيح طبيعي $n_0 \le n$ بعدد حقيقي وحيد u_n

نقول إننا عرفنا متتالية عددية نرمز لها بالرمز $(u_n)_{n\ge n_0}$ أو (u_n) .

العدد u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$.

العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$.

تعريف:متتالية مكبورة – مصغورة – محدودة

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ مكبورة بالعدد **M** يكافئ $u_n \le M$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ مصغورة بالعدد **m** يكافئ $u_n \ge m$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ محدودة يكافئ أنها مكبورة ومصغورة

يكافئ وجود عدد حقيقي موجب α حيث $|u_n| \le \alpha$ لكل $n_0 \le n$

رتابة متتالية :

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ تزايدية يكافئ $u_{n+1} - u_n \ge 0$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ تناقصية يكافئ $u_{n+1} - u_n \le 0$ لكل $n_0 \le n$.

. $(u_n)_{n\ge n_0}$ ثابتة يكافئ $u_{n+1} = u_n$ لكل $n_0 \le n$.

. كل متتالية تزايدية تكون مصغورة بحدها الأول .

. كل متتالية تناقصية تكون مكبورة بحدها الأول .

المتتالية الحسابية

نقول إن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي **r** ، غير مرتبط بالعدد **n** ، حيث $u_{n+1} - u_n = r$ لكل $n_0 \le n$.

صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$ لكل $n_0 \le n$.

العلاقة بين حدين : $u_n = u_p + (n-p)r$ لكل $n_0 \le n$ و $n_0 \le p$

صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

لكل عددين طبيعيين **n** و **p** من $[n_0;+\infty[$ حيث $p \le n$.

المتتالية الهندسية :

نقول إن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي **q** ، غير مرتبط بالعدد **n** ، حيث $u_{n+1} = q\, u_n$ لكل $n_0 \le n$.

صيغة الحد العام : $u_n = u_{n_0} . q^{(n-n_0)}$ لكل $n_0 \le n$.

العلاقة بين حدين: $u_n = u_p . q^{(n-p)}$ لكل $n_0 \le n$ و $n_0 \le p$

صيغة المجموع : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

مع $q \ne 1$ لكل عددين طبيعيين **n** و **p** من $[n_0;+\infty[$ حيث $p \le n$.

نهاية متتالية :

نقول إن نهاية متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هي عدد حقيقي **l** إذا كان كل مجال مركزه **l** يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة .

. نقول إن نهاية $(u_n)_{n\ge n_0}$ هي $(+\infty)$ إذا كان كل مجال من النوع $[a;+\infty[$ يحتوي على جميع حدود المتتالية ابتداء من رتبة معينة

تقارب متتالية:

نقول إن متتالية متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية .

كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة .

مصاديق تقارب متتالية:

. كل متتالية تزايدية ومكبورة تكون متقاربة .

. كل متتالية تناقصية و مصغورة تكون متقاربة .

إذا كان : $v_n \prec u_n \prec w_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0

و $\lim v_n = \lim w_n = l \in R$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ تكون متقاربة و $\lim u_n = l$

إذا كان : $|u_n - l| \prec v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = 0$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متقاربة و $\lim u_n = l$.

. إذا كان : $u_n \prec v_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = -\infty$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = -\infty$

إذا كان : $v_n \prec u_n$ ابتداء من عدد طبيعي n_0 و $\lim v_n = +\infty$

فإن : $(u_n)_{n\in I}$ متتالية متباعدة و $\lim u_n = +\infty$

تقارب المتتالية ذات الحد العام a^n حيث $a \in R$:

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فإن $\lim a^n = 0$.

إذا كان $a = 1$ فإن : $\lim a^n = 1$.

إذا كان $a \succ 1$ فإن : $\lim a^n = +\infty$.

إذا كان $a \le -1$ فإن : المتتالية (a^n) ليست لها نهاية .

تقارب المتتالية ذات الحد العام n^r حيث $r \in Q^*$:

إذا كان $r \succ 0$ فإن $\lim\limits_{n} n^r = +\infty$

إذا كان : $r \prec 0$ فإن $\lim\limits_{n} n^r = 0$

نهاية متتالية ترجعية:

لتكن **f** دالة متصلة على مجال **I** بحيث : $f(I) \subset I$ و u_0 عنصرا من **I**.

نعتبر المتتالية المعرفة بحدها الأول u_0 وبالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل **n**

إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق أن $f(l) = l$.

نهاية المتتالية $v_n = f(u_n)$:

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة نحو عدد **l** و **f** دالة متصلة في **l**

فإن المتتالية (v_n) تكون متقاربة نحو $f(l)$

2 ع ت اتصال دالة

1.اتصال دالة :

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2.الاتصال على مجال :

– تكون دالة متصلة على مجال $]a,b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة منه

– تكون دالة متصلة على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ، على اليمين في a و على اليسار في b .

خاصيـــــات :

– كل دالة حدودية متصلة على R .

– كل دالة جذرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها .

– الدالتان $x\to \cos x$ و $x\to \sin x$ متصلتان على R .

– الدالة $x\to\sqrt{x}$ متصلة على $[0,+\infty[$.

– الدالة $x\to\tan x$ متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها وهي $D=R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in Z\right\}$

3.العمليات على الدوال المتصلة :

– إذا كانت f و g دالتين متصلتين في عدد x_0

فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و $\alpha.f$ حيث α عدد حقيقي متصلة في x_0

– وإذا كان $g(x_0)\neq 0$ فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ الدالتان متصلتان في x_0

4.اتصـــال مركبة دالتين :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J حيث

$f(I)\subset J$ و x_0 عنصرا من I

إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$

فإن الدالة $g\circ f$ تكون متصلة في x_0 .

نتيجة: إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0

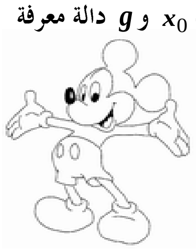
فإن $\sqrt{f}$ دالة متصلة في x_0 .

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$

إذا كان : $\lim_{x_0} f(x)=l$ و g متصلة في l

فإن : $\lim_{x_0}(g\circ f)(x)=g(l)$



5.مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ و λ عددا حقيقيا محصورا بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=\lambda$

نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ و $f(a).f(b)\prec 0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $]a,b[$.

وإذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن الحل يكون وحيدا

6.الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإنها تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $J=f(I)$ ولدينا التكافؤ التالي :

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x)\\ x\in J\end{cases}$$

خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I فإن :

. دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $f(I)$ ولها نفس تغيرات f

. منحنيى f و f^{-1} متماثلان في م م م بالنسبة للمنصف الأول

7.تعريف دالة الجذر من الرتبة n :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

الدالة العكسية لقصور الدالة $x\to x^n$ على R^+ يسمى دالة الجذر من الرتبة n

خاصيـــــات :

. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ معرفة على R^+ وتأخذ قيمها في R^+

. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على R^+ .

. $\begin{cases}x=\sqrt[n]{y}\\ y\in R^+\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^n\\x\in R^+\end{cases}$

. $\sqrt[n]{x^n}=x$, $\forall x\in R^+$ *** $(\sqrt[n]{x})^n=x$, $\forall x\in R^+$

$$(\forall x\in R^+)\ (\forall y\in R^+)\ :\ \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x=y$$

$$(\forall x\in R^+)\ (\forall y\in R^+)\ :\ \sqrt[n]{x}\prec\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x\prec y$$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$ **** $\sqrt[n]{x}=\sqrt[nm]{x^m}$: $\forall x\geq 0$

$\forall x\geq 0,\ \forall y\geq 0\ :\ \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$

$\forall x\geq 0,\ \forall y\succ 0\ :\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $(y\succ 0)$

+.إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

8.القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و r عددا جذريا غير منعدم

العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ويكتب $a^r=\sqrt[q]{a^p}$ حيث :

$r=\frac{p}{q}$ مع $p\in Z^*$ و $q\in N^*$

خاصيـــات. : لكل a و b من R_+^* و r و r' من Q* لدينا :

$$a^r.a^{r'}=a^{r+r'}\ ,\ (ab)^r=a^rb^r\ ;\ a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}\ ;\ \frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}\ ;\ (a^r)^{r'}=a^{rr'}$$

2 ع ت الإشتقاق

1.قابلية اشتقاق دالة في عدد

لتكن **f** دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه عدد **a** .

نقول إن **f**قابلة للاشتقاق في **a** إذا كان: $l=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}\in R$

العدد l يسمى العدد المشتق للدالة **f** في **a** , ويكتب . $f'(a)$

وفي هذه الحالة لدينا : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}=f'(a)$.

2– قابلية اشتقاق دالة على اليمين و على اليسارفي عدد :

لتكن **f** دالةعددية معرفة على مجال من النوع $[a,a+\varepsilon[$ حيث $\varepsilon\succ 0$.

fقابلة للاشتقاق على اليمين في **a** إذا كان: $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in R$.

هذه النهاية , عندما تكون منتهية , تسمى العدد المشتق للدالة**f** على اليمين في **a** ونرمز له بالرمز : $f'_d(a)$.

بطريقة مماثلة نعرف قابلية اشتقاق دالة على اليسار في عدد .

نرمزللعدد المشتق للدالة **f** في العدد **a** بالرمز: $f'_g(a)$.

خاصية :

تكون دالة **f** قابلة للاشتقاق في عدد **a** إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين في **a** و قابلة للاشتقاق على اليسار في **a** و $f'_d(a)=f'_g(a)$

بتعبير اخر : (**f** قابلة للاشتقاق في **a**) $\Leftrightarrow$ ($f'_d(a)=f'_g(a)$).

خاصية : الاشتقاق والاتصال

كل دالة قابلة للاشتقاق في عدد **a** تكون متصلة في العدد **a** .

انتبه ! العكس غير صحيح . (اعتبر الدالة $x\to|x|$)

قابلية اشتقاق دالة على مجال

تكون دالة **f** ق ش على مجال $]a,b[$ إذا كانت ق ش في جميع نقطه .

.تكون **f** ق ش على $[a,b[$ إذا كانت ق ش على $]a.b[$ وعلى اليمين في a

.تكون **f** ق ش $]a,b]$ إذا كانت ق ش على $]a,b[$ وعلى اليسار في **b** .

ملاحظة : نعرف بالمثل قابلية اشتقاق دالة على باقي أنواع المجالات .

مماس منحنى دالة – نصف مماس منحنى دالة

إذا كانت دالة **f**قابلة للاشتقاق في عدد **a** فإن منحناها يقبل مماسا في النقطة $M(a;f(a))$ معادلته $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

ملاحظة : العدد $f'(a)$ هو المعامل الموجه للمماس في **a** .

.إذا كانت **f** ق ش على اليمين في **a** فإن منحناهايقبل نصف مماس على اليمين في النقطة $M(a;f(a))$ معادلته : $\begin{cases}y=f'_d(a).(x-a)+f(a)\\ x\geq a\end{cases}$

.إذا كانت **f** ق ش على اليسار في **a** فإن منحناهايقبل نصف مماس على اليمين في $M(a;f(a))$ معادلته : $\begin{cases}y=f'_g(a).(x-a)+f(a)\\ x\leq a\end{cases}$

.إذا كان: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$ فإن الدالة **f** غير قابلة للاشتقاق في **a** ومنحناها يقبل نصف مماس مواز لمحور الأراتيب .

.إذا كان $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ فإن الدالة **f** غير قابلة للاشتقاق في **a** ومنحناها يقبل نصفي مماس ليس لهما نفس الحامل .

في هذه الحالة $A(a,f(a))$ تسمى نقطة مزواة

تأويلات هندسية

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$+\infty$	$l\in R^*$	0
fغير ق ش على اليمين في **a** ومنحنى **f** يقبل نصف مماس عمودي على اليمين النقطة في $M(a;f(a))$	**f** ق ش على اليمين في **a** ومنحنى **f** يقبل نصف مماس مائل على اليمين $M(a;f(a))$	**f** ق ش على اليمين في **a** ومنحنى **f** يقبل نصف مماس أفقي على اليمين $M(a;f(a))$

3.مشتقة المركبة ..مشتقة الدالة العكسية :

خاصية : مشتقة المركبة في نقطة

لتكن **f** دالة معرفة على مجال **I** و **g** دالة معرفة على مجال **J** بحيث $f(I)\subset J$.ليكن **a** عنصرا من **I** .

إذا كانت الدالة **f** ق ش في **a** و الدالة **g** ق ش في $f(a)$ فإن : $g\circ f$ ق ش في **a** و لدينا :

$$(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$$

خاصية : مشتقة المركبة على مجال

لتكن **f** دالة معرفة على مجال **I** و **g** دالة معرفة على مجال **J** بحيث $f(I)\subset J$.

إذا كانت الدالة **f** ق ش على **I** و الدالة **g** ق ش على **J** فإن $g\circ f$ ق ش على **I** ولكل **x** من **I** : $(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

خاصية :

لتكن **f** دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال **I**.

إذا كانت **f** قابلة للإشتقاق في عدد **a** و $f'(a)\neq 0$ فإن الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق في $b=f(a)$ ولدينا $f^{-1}(b)=\frac{1}{f'(a)}$

2ع ت الإشتقاق

خاصية:مشتقة دالة الجذر

ليكن n من $N^*-\{1\}$. دالة الجذر من الرتبة n ق ش على R_+^* ولدينا : $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$ لكل x من R_+^*

خاصية

ليكن n من $N^*-\{1\}$ ،

إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق وموجبة قطعا على مجال I

فإن الدالة $\sqrt[n]{u}$ قابلة للإشتقاق على I ولدينا :

$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$ لكل x من I .

4.تطبيقات :

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق على مجال I .

. f تزايدية على I يكافئ $f'(x)\geq 0$ لكل x من I .

.f تناقصية على I يكافئ $f'(x)\leq 0$ لكل x من I .

لتكن f دالة ق ش على مجال مفتوح I و x_0 عنصر من I

تقبل f مطرافا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تنعدم في x_0 وتغير إشارتها x_0

لتكن f دالة قابلة للإشتقاق مرتين على مجال I .

. تقعر C موجه نحو الأعلى يكافئ $f''(x)\geq 0$ لكل x من I

هندسيا :C يوجد فوق جميع مماساته

. تقعر C موجه نحو الأسفل يكافئ $f''(x)\leq 0$ لكل x من I

هندسيا :C يوجد تحت جميع مماساته

.إذا كانت f'' تنعدم في x_0 من I وتغيرإشارتها بجوار x_0

فإن $I(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى C.

هندسيا : تقعر C يتغير في النقطة $I(x_0, f(x_0))$.

5.عناصر تماثل منحنى دالة :

لتكن f دالة معرفة على مجموعة D و a و b عددين حقيقيين

. يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل منحنى f إذاوفقط

إذا كان لكل x من D لدينا $\begin{cases}2a-x\in D\\ f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

. تكون النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل منحنى f إذا وفقط إذا كان

لكل x من D لدينا : $\begin{cases}2a-x\in D\\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

ملاحظات :

.محورتماثل منحنى دالة دائما يكون مواز لمحور الأراتيب.

.مركزتماثل منحنى دالة لا ينتمي بالضرورة إليه.

ليكن T عددا حقيقيا موجبا قطعا. و f دالة معرفة على مجموعة D .

نقول إن f دورية و T دور لها إذا كان: $(\forall x\in D):\begin{cases}x\pm T\in D\\ f(x+T)=f(x)\end{cases}$

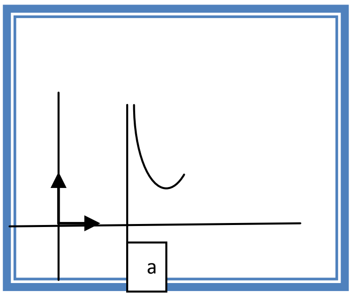
6.مشتقات الدوال الإعتيادية والعمليات :

الدالة f	الدالة المشتقة	حيز تعريف الدالة المشتقة
c	o	R
ax	a	R
x^n $n\in N^*-\{1\}$	$n\,x^{n-1}$	R
x^r $n\in Z^- -\{-1\}$	$r\,x^{r-1}$	R_-^* أو R_+^*
$\sqrt[n]{x}$ $n\in N^*-\{1\}$	$\dfrac{1}{n\,\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	R_+^*
x^r $r\in Q^*$	$r\,x^{r-1}$	R_+^*
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	R_-^* أو R_+^*
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	R_+^*
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$	R
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$	R
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	على كل مجال ضمن $R-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi / \pi\in Z\right\}$
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	R_-^* أو R_+^*
e^x	e^x	R
$\alpha\, u$	$\alpha\, u'$	حيث تكون u ق ش
$u+v$	$u'+v'$	حيث تكون u و v ق ش
$u.v$	$u'v+uv'$	حيث تكون u و v ق ش
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	حيث تكون u و v ق ش و v لاتنعدم
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$	حيث تكون u ق ش و لاتنعدم
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	حيث تكون u ق ش و موجبة قطعا
$\sqrt[n]{u}$	$\dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	حيث تكون u ق ش و موجبة قطعا
u^n $n\in N^*-\{1\}$	$nu^{n-1}.u'$	حيث تكون u ق ش
$\ln\lvert u\rvert$	$\dfrac{u'}{u}$	حيث تكون u ق ش و لاتنعدم
e^u	$u'e^u$	R

الفروع اللآنهائية لمنحنى دالة

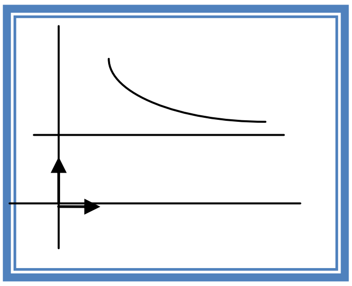
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$

المستقيم المعرف بالمعادلة $x=a$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\alpha$

المستقيم المعرف بالمعادلة $y=\alpha$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$

نحسب

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

العدد 0

منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل جوار $+\infty$

عدد حقيقي غير منعدم a

نحسب النهاية

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax$

مالانهاية

منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

عدد حقيقي b

المستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحنى الدالة f جوار $+\infty$

مالانهاية

منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax$ جوار $+\infty$

wadiiifi@hotmail.com

إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ فإن المستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax+b$ مقارب لمنحنى الدالة f جوار $+\infty$

الدوال اللوغاريتمية والأسية — 2ع ت

1.الدالة اللوغاريتمية النبيرية :

الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري , ونرمز لها ب: $\ln$

نتائــــــــــــج :

* الدالة $\ln$ معرفة ,متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.
* الدالة $\ln$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

بتعبير اخر : لكل x و y من $]0,+\infty[$:
$$\ln x\prec \ln y \Leftrightarrow x\prec y$$
$$\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$$

خاصيات جبرية

لكل x و y من $]0,+\infty[$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا :

$$\ln(xy)=\ln x+\ln y \quad ، \quad \ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$$
$$\ln x^r=r\ln x \quad ، \quad \ln\frac{1}{y}=-\ln y$$

نهايـــــــات هامة :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\ln x=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad (n\in N^*) \quad ، \quad \lim_{x\to0^+}x^n\ln x=0$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad ، \quad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية النبيرية :

* الدالة $\ln$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا :
$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$
* إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق و غير منعدمة على مجال I
فإن الدالة $x\mapsto\ln|u(x)|$ قابلة للإشتقاق على I
ولدينا : $\forall x\in I,\quad (\ln|u(x)|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

نتيجة :اذا كانت u قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على مجال I فان الدوال الاصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto\ln|u(x)|+\lambda$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

الدالة اللوغاريتمية للأساس a :

ليكن a عنصرا من $]0,1[\cup]1,+\infty[$. الدالة اللوغاريتمية للأساس a هي الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما $\log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$, $\forall x\succ0$

دالة اللوغاريتم للأساس 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و تكتب $\log$.

2.الدالة الأسية النبيرية

التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النبيري $\ln$ تسمى الدالة الأسية النبيرية ونرمز لها بالرمز : **exp** .

نتائــــــــــــج :

* الدالة **exp** معرفة ، متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
* لكل x و y من $\mathbb{R}$: $exp(x)\prec exp(y)\Leftrightarrow x\prec y$
$exp(x)=exp(y)\Leftrightarrow x=y$
* لكل x من $\mathbb{R}$: $\ln(exp(x))=x$
* لكل x من $]0;+\infty[$: $exp(\ln x)=x$
* لكل x من $\mathbb{R}$: $exp(x)\succ0$
* $exp(0)=1$ و $exp(1)=e$
* لكل x من $\mathbb{R}$: $exp(x)=e^x$

خاصيات جبرية

لكل x و y من $\mathbb{R}$ لكل r من $\mathbb{Q}$:

$$e^{x+y}=e^x.e^y \quad ، \quad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$$
$$e^{-x}=\frac{1}{e^x} \quad ، \quad e^{rx}=(e^x)^r$$

النهايات الاعتيادية : $(n\in N^*)$

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}xe^x=0$$
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

مشتقة الدالة $x\mapsto e^x$:

*الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(\forall x\in\mathbb{R}) : (e^x)'=e^x$

*اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$
فان : $x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا
$$(\forall x\in I) : \left(e^{u(x)}\right)'=u'(x).e^{u(x)}$$

نتيجة :اذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال الاصلية للدالة $x\mapsto u'(x).e^{u(x)}$ على المجال I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x\mapsto e^{u(x)}+\lambda$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$

2ع ت — الدوال الأصلية

تعريف دالة أصلية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة عددية F قابلة للإشتقاق على المجال I بحيث $F'(x)=f(x)$ لكل x من I .

خاصية :

لتكن f دالة معرفة على مجال I. وF دالة أصلية للدالة f على المجال I

الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال المعرفة بما يلي :

$x \to F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي .

ملاحظة : إذا كانت F و G دالين أصليتين على مجال I

فإن : $(\exists c \in R)\ (\forall x \in I)\ :\ F(x)-G(x)=c$

مع c غير مرتبط بالعدد x .

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I وتقبل دوال أصلية عليه.

x_0 عنصر من I . y_0 عدد حقيقي

توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على المجال I تحقق $G(x_0)=y_0$

ملاحظة: تحديد الدالة G يعود إلى تحديد قيمة C

خاصية :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دوال أصلية عليه.

خاصية :

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال I و α عددا حقيقيا .

إذا كانت F و G دالتين أصليتين على التوالي للدالتين f و g على المجال I

فإن . $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I .

. αF دالة أصلية للدالة αf على المجال I .

جدول دوال أصلية :

الدالة f	الدوال الأصلية F	مجال تعريف f وF
0	'عدد ثابت' C	R
a	$ax+b$	R
x^n مع $n \in N^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	R
$\frac{1}{x^n}$ مع $(n \in N-\{0,1\})$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]0;+\infty[$
x^r مع $(n \in Q-\{0,-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty,0[$
e^x	e^x+c	R
e^{ax} مع a غير منعدم	$\frac{e^{ax}}{a}+c$	R
$\cos(ax+b)$ مع a غير منعدم	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	R
$\sin(ax+b)$ مع a غير منعدم	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$	R
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x+c$	$\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ مع k من Z .
$u'(x)u^r(x)$ مع $(r \in Q-\{0,-1\})$	$\frac{1}{r+1}(u(x))^{r+1}+c$	حيث u ق ش وموجبة قطعا
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+c$	حيث تكون u ق ش وموجبة قطعا
$\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$\frac{-1}{u(x)}+c$	حيث تكون u ق ش ولاتنعدم
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+c$	حيث تكون u ق ش ولاتنعدم
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	حيث u ق ش

(ق ش : قابلة للإشتقاق)

2ع ت حساب التكامل

1.تكامل دالة على مجال مغلق :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية عليه.

العدد $F(b)-F(a)$ غير مرتبط بالدالة الأصلية F ويسمى تكامل f

من a إلى b ويرمز له بالرمز : $\int_a^b f(x)dx$

نكتب $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

المتغير x في التكامل $\int_a^b f(x)dx$ صامت ولدينا :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du...$$

2.علاقة شال :

لكل a و b و c من المجال I :

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt$$

نتائج :

. $\int_a^a f(t)dt=0$

. $\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

3.خطانية التكامل :

. $\int_a^b (f(t)+g(t))dt=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t)dt$

. $\int_a^b \alpha f(t)dt=\alpha\int_a^b f(t)dt$ حيث α عدد حقيقي .

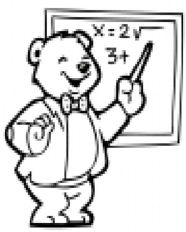
4.الدالة الأصلية التي تنعدم في نقطة :

الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في عدد a هي $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$

5.التكامل والترتيب :

.إذا كان: $f(t)\geq 0$ لكل t من $[a,b]$

فإن: $\int_a^b f(t)dt\geq 0$



. إذا كان: $f(t)\geq g(t)$ لكل t من $[a,b]$

فإن: $\int_a^b f(t)dt\geq\int_a^b g(t)dt$

.إذا كان : $a\leq b$

فإن : $\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq\int_a^b |f(t)|dt$

. .إذا كان : $a\leq b$

فإن : $\left|\int_a^b f(t)dt\right|\leq M(b-a)$ حيث : M هي القيمة القصوى للدالة f على $[a,b]$.

6.القيمة المتوسطة :

.إذا كان $a\prec b$

فإن : $(\exists c\in[a,b]):\ f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

. $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ يسمى القيمة المتوسطةللدالة f على $[a,b]$

7.حساب تكامل باستعمال مكاملة بالأجزاء:

إذا كانت: u و v دالتين ق ش و u' و v' متصلتين على $[a,b]$

فإن : $\int_a^b u'(t)v(t)dt=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)dt$

هذه المتساوية تسمى صيغة المكاملة بالأجزاء

8.حساب المساحات :

مساحة حيز المستوى المحصور بين منحني دالتين متصلتين على I والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\ \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

. مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى f ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=a$ و $x=b$ هي $\int_a^b |f(x)|dx\ \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

.مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى f والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=ax+b$ والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=a$ و $x=b$ هي

$$\int_a^b |f(x)-(ax+b)|dx\ ua$$

حيث ua هي وحدة قياس المساحة ولدينا : $u\,a=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

9.حساب حجم مجسم :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

لتكن f دالة معرفة على مجال $[a,b]$.

حجم المجسم المولد بدوران منحنى f حول محور الأفاصيل هو:

$$\int_a^b \pi(f(t))^2dt\ \ uv$$

حيث $u\,v$ هي وحدة قياس الحجوم ولدينا $uv=\|\vec{i}\|^3$

2ع ت حساب الإحتمال

1.التعداد :

خاصية : (المبدا الاساسي للتعداد – او مبدا الجداء)

لتكن E تجربة تتطلب نتائجها k اختيارا

اذا كان الاختيار الاول يتم ب n_1 طريقة مختلفة

و الاختيار الثاني يتم ب n_2 طريقة مختلفة

والاختيار k يتم ب n_k طريقة مختلفة .

فان عدد النتائج الممكنة هوالجداء $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

تعريف : (الترتيبات – التبديلات)

ليكن n و p عنصرين من N^*

. كل ترتيب ل p عنصر مختار من بين n عنصر (مع امكانية تكرار نفس العنصر)يسمى ترتيبة بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر .

. كل ترتيب ل p عنصر مختار من بين n عنصر يسمى ترتيب بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر (هذا ممكن اذا كان $1 \le p \le n$) .

. كل ترتيبة بدون تكرار ل n عنصر من بين n عنصر تسمى تبديلة ل n عنصر .

تعريف : (التاليفات)

ليكن n و p عنصرين من N حيث $0 \le p \le n$.

وليكن E مجموعة مكونة من n عنصر

كل جزء من E يتكون من p عنصر يسمى تاليفة ل p عنصر من بين n عنصر

خاصية : (حساب الاختيارات)

ليكن n و p عنصرين من N^*

. عدد الترتيبات بتكرار ل p عنصر من بين n عنصر هو n^p .

. عدد الترتيبات بدون تكرار ل p عنصر من بين n عنصر (حيث $1 \le p \le n$) هو :

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ ونرمز له بالرمز A_n^p

. عدد الترتيبات ل n عنصر من بين n عنصر هو

$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$ ونرمز له بالرمز $n!$ واصطلاحا $0!=1$.

. عدد التاليفات المكونة من p عنصر من بين n عنصر هو $\dfrac{A_n^p}{p!}$ ونرمز له بالرمز C_n^p

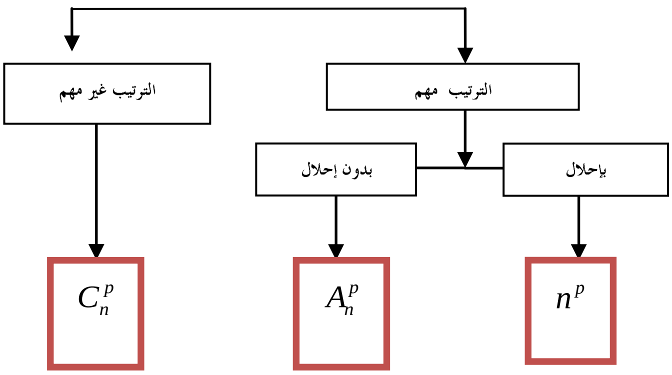
نتائج:

ليكن n من N^* و p عددا صحيحا طبيعيا حيث $0 \le p \le n$

. $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

. $C_n^p = C_n^{n-p}$

.علاقة باسكال: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ $(p+1 \le n)$



حيث في حالة سحب كرات من كيس :

n هو عدد الكرات الموجودة في الكيس و p هو عدد الكرات التي نريد سحبها

2.احتمال على مجموعة منتهية :

تعريف: (احتمال على مجموعة منتهية)

ليكن $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ كون إمكانيات تجربة عشوائية

عندما نربط كل جزء A من Ω بعدد حقيقي $p(A)$ بحيث :

. $p(\Omega) = 1$

. $\forall (A,B) \in P(\Omega)^2 \quad A \cap B \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

نقول إننا عرفنا احتمالا على Ω .

مصطلحات

.الزوج (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا

.كل جزء من Ω يسمى حدثا

.لكل i من $\{1;2;..n\}$ الحدث $\{\omega_1\}$ يسمى حدثا ابتدائيا

. اذا كان $A \cap B = \Phi$ نقول ان A و B حدثين غير منسجمين

نتائج

ليكن (Ω, p) فضاء ا احتماليا منتهيا و A و B حدثين

. $p(\Phi) = 0$

. $0 \le p(A) \le 1$

. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ (حيث $\overline{A}$ متمم A في Ω)

. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

2 ع ت — حساب الإحتمال

خاصية : (فرضية تساوي الاحتمالات)

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا منتهيا
اذا كانت جميع الاحداث الابتدائية متساوية الاحتمال نقول ان فرضية تساوي الاحتمالات محققة واحتمال كل حدث **A** في هذه الحالة هو
$$p(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

3.الاحتمال الشرطي :

تعريف : (الاحتمال الشرطي)

ليكن (Ω, p) يسمى فضاءا احتماليا منتهيا . و **A** و **B** حدثين بحيث
$p(A)\neq 0$
احتمال **B** علما ان **A** محقق هو $\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$
ونرمز له بالرمز $p_A(B)$ او $p(B/A)$

خاصية : (صيغة الاحتمالات المركبة)

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا منتهيا و **A** و **B** حدثين حيث
$p(A)p(B)\neq 0$ لدينا $p(A/B)p(B)=p(B)p(B/A)$

تعريف : (تجزئة)

نقول ان الاحداث B_1 و B_2 و.....و B_n تكون تجزئة للفضاء Ω اذا كان :
. الاحداث B_1 و B_2 و.....و B_n غير منسجمة مثنى مثنى .
. $B_1\cup B_2\cup.....\cup B_n=\Omega$

خاصية : (صيغة الاحتمالات الكلية)

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا و B_1 و B_2 و.....و B_n تجزئة حيث
$\forall i\in[1,n]\quad p(B_1)\neq 0$
لكل **A** حدث ضمن Ω لدينا $p(A)=\sum_{i=1}^{n}p(A/B_i)p(B_i)$

تعريف : (استقلالية حدثين)

A و B مستقلين اذا كان : $p(A\cap B)=p(A)p(B)$

خاصية : (استقلالية اختبارات)

اذا كان **P** احتمال الحدث **A**. واعدنا نفس الاختبار **n** مرة في ظروف مستقلة فان احتمال وقوع **k** مرة الحدث هو $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

4.المتغير العشوائي :

تعريف : (المتغير العشوائي)

(Ω, p) فضاء احتمالي منته
عندما نربط كل عنصر من Ω بعدد x_i نقول أننا عرفنا متغيرا عشوائيا $[a,b]$ على Ω .

تعريف : (قانون احتمال المتغير)

ليكن (Ω, p) فضاءا احتماليا منته و **X** متغير عشوائي معرف على Ω
.المجموعة $X(\Omega)=\{x_1,....,x_m\}$ تسمى مجموعة قيم **X** .
.الدالة العددية التي تربط كل قيمة x_i بالعدد $p(X=x_i)$ تسمى قانون احتمال المتغير **X**

تعريف : (وسيطات المتغير العشوائي)

ليكن (Ω, p) فضاء احتمالي منته و **X** متغير عشوائي معرف على Ω
.الامل الرياضي $E(X)=\sum_{k=1}^{m}x_k.p(X=x_k)$
.المغايرة $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$
.الانحراف الطرازي $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

5.القانون الحداني :

تعريف : (المتغير العشوائي الحداني)

ليكن **n** عدد موجب و $p\in[0,1]$ عدد حقيقي
المتغير العشوائي **X** الذي قانونه الاحتمالي معرف بما يلي
$$\forall k\in[0,n]\quad p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$
يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه **n** و **p** .

خاصية : (وسيطات المتغير العشوائي الحداني)

ليكن **X** متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه **n** و **p** لدينا
. الامل الرياضي $E(X)=np$
. المغايرة $V(X)=np(1-p)$

2 ع ت — المعادلات التفاضلية

1. المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى

تعريف : (المعادلة $y' = ay$)

ليكن a عددا حقيقيا . المعادلة $y' = ay$ ذات المجهول الدالة العددية y قابلة للاشتقاق على R تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى .

ملاحظة :

اذا كان $a = 0$ فان المعادلة تصبح $y' = 0$ و بالتالي y دالة ثابتة .

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay$

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay$ هو $y = \alpha e^{ax}$ حيث $\alpha \in R$

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay$ بشرط بدئي (

ليكن a و x_0 و β اعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

النظمة $\begin{cases} y' = ay \\ y(x_0) = \beta \end{cases}$

تقبل حلا وحيدا وهو $y = \beta e^{a(x-x_0)}$

خاصية : (حل المعادلة $y' = ay + b$)

ليكن a و b اعداد حقيقية غير منعدمة .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $y = \alpha e^{ax} - \frac{b}{a}$

حيث $\alpha \in R$

2. المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية :

تعريف : (المعادلة $y'' + ay' + by = 0$)

ليكن a و b عددين حقيقيين . المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ ذات المجهول الدالة العددية y قابلة للاشتقاق مرتين على R تسمى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية .

ملاحظة :

اذا كان $b = 0$ و $a \neq 0$

فان المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ تصبح $z' + az = 0$ حيث

$z = y'$ و بالتالي نعود الى حلول المعادلة من الدرجة الاولى .

اذا كان $b = 0$ و $a = 0$ فان المعادلة $y'' + ay' + by = 0$ تصبح

$y'' = 0$ و بالتالي $y = \alpha x + \beta$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

خاصية : (حل المعادلة $y'' + ay' + by = 0$

ليكن a و b عددين حقيقيين . حيث $b \neq 0$

نعتبر المعادلة $y'' + ay' + by = 0$.

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ حيث r عدد عقدي تسمى معادلتها المميزة

ليكن Δ مميز هذه الاخيرة .

اذا كان $\Delta \succ 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 r_2

والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الدوال العددية

$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

اذا كان $\Delta = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلا مزدوجا r والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الدوال العددية $y = (\alpha x + \beta) e^{rx}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

اذا كان $\Delta \prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $p + iq$ و $p - iq$ والحل العام للمعادلة التفاضلية هو الدوال $y = (\alpha \cos qx + \beta \sin qx) e^{px}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

حالات خاصة :

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم

الحل العام للمعادلة $y'' - \omega^2 y = 0$ هو $y = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x}$ حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$

الحل العام للمعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ هو $y = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$

حيث $(\alpha, \beta) \in R^2$.

نهاية الملخص